**Лекция 9**

Краткое содержание: Введение в динамику. Аксиомы классической механики. Системы единиц. Дифференциальные уравнения движения точки. Основные задачи динамики. Основные виды прямолинейного движения точки.

Общие теоремы динамики точки. Количество движения точки. Элементарный и полный импульс силы. Теорема об изменении количества движения точки. Момент количества движения точки. Теорема об изменении момента количества движения точки. Работа силы. Мощность. Кинетическая энергия точки. Теорема об изменении кинетической энергии точки. Принцип Даламбера для материальной точки.

### ДИНАМИКА

### Введение

В динамике изучаются механические движения материальных объектов под действием сил. Простейшим материальным объектом является материальная точка.

**Материальная точка** это модель материального тела любой формы, размерами которого можно пренебречь и принять за геометрическую точку, имеющую определенную массу.

Более сложные материальные объекты – **механические системы** и **твердые тела**, состоят из набора материальных точек.

Движение материальных объектов всегда происходит в пространстве относительно определенной системы отсчета и во времени. Пространство считается трехмерным эвклидовым пространством, свойства которого не зависят от движущихся в нем материальных объектов.

# **Аксиомы классической механики (Законы Ньютона)**

**Первая аксиома или закон инерции**. Материальная точка, на которую не действуют силы или действует равновесная система сил, обладает способностью сохранять свое состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения относительно инерциальной системы отсчета.

Материальная точка, на которую действует равновесная система сил, называется **изолированной материальной точкой**.

Равномерное и прямолинейное движение точки называется **движением по инерции**.

**Вторая аксиома или основной закон динамики.** Ускорение материальной точки относительно инерционной системы отсчета пропорционально приложенной к точке силе и направлено по этой силе.



*m*





Положительный коэффициент пропорциональности ***m***, характеризует инертные свойства материальной точки и называется массой точки.

Масса не зависит от характеристик движения точки и от природы сил. Масса считается постоянной величиной и зависит только от самой материальной точки.

Сила, приложенная к материальной точке, всегда имеет материальный источник в виде других материальных тел, которые действуют на точку путем контакта при непосредственном соприкосновении с ней или на расстоянии через посредство силовых полей.

**Третья аксиома или закон о равенстве сил действия и противодействия.** Силы взаимодействия двух материальных точек равны по величине и противоположны по направлению. 

**Четвертая аксиома или закон независимого действия сил.** При одновременном действии на материальную точку нескольких сил ускорение точки относительно инерционной системы отсчета от действия каждой отдельной силы не зависит от наличия других, приложенных к точке, сил и полное ускорение равно векторной сумме ускорений от действия отдельных сил.

 

Аксиомы классической механики хорошо согласуются с результатами опытов.

**Дифференциальные уравнения движения точки.**

Основное уравнение динамики 

можно записать так  или так 

Проецируя уравнение  на оси координат получаем

  

так как , , , то

  

**Частные случаи:**

А) Точка движется в плоскости. Выбираем в плоскости координаты *xOy* получаем   

Б) Точка движется по прямой. Выбираем на прямой координату *Ox* получаем   

Основное уравнение динамики  можно спроецировать на естественные подвижные оси.

  

  

Эта форма уравнений удобна для исследования некоторых случаев полета снарядов и ракет.

**Основные задачи динамики**

**Первая или прямая задача:**

Известна масса точки и закон ее движения, необходимо найти действующую на точку силу.

***m***   

Вычисляем вторые производные по времени от координат точки, умножаем их на массу и получаем проекции силы на оси координат

  

Зная проекции силы на оси координат, определяем модуль силы и ее направляющие косинусы:

 

**Пример 1:** Движение точки в плоскости *xOy* определяется уравнениями:

; ; ; время.

 Решение: ;

;

; .

 - Уравнение траектории в координатной форме (эллипс).



; 

**Пример 2:** Точка, имеющая массу , движется из состояния покоя по окружности радиуса  с постоянным касательным ускорением . Определить действующую на точку силу в момент, когда она пройдет по траектории расстояние .

 Решение: Применяя дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на естественные оси, имеем:

; ; ;

Так как , то , 

; ;



; следовательно ;

; следовательно





**Вторая или обратная задача:**

Известна масса точки и действующая на точку сила, необходимо определить закон движение этой точки.

Рассмотрим решение этой задачи в декартовой системе координат. Сила зависит от времени, координат точки, ее скорости и других причин.

, ,



Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что решение одного дифференциального уравнения второго порядка содержит две произвольные постоянные. Для случая системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка имеется шесть произвольных постоянных: 

Каждая из координат  движущейся точки после интегрирования системы уравнений зависит от времени и всех шести произвольных постоянных, т.е.







К этим уравнениям необходимо добавить начальные условия:

,  

,  

Используя эти начальные условия можно получить шесть алгебраических уравнений для определения шести произвольных постоянных .

**Основные виды прямолинейного движения точки**

Дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки вдоль оси Оx имеет вид:

, Начальные условия , .

**Наиболее важные случаи.**

1. Сила постоянна.   

Имеем равнопеременное движение (движение с постоянным ускорением)

2. Сила зависит от времени.  

 

3. Сила зависит от координаты или скорости.

Силу, зависящую от координаты х , создают упругие тела при их деформации (например, сжатая или растянутая пружина). 

Сила, зависящая от скорости движения , это сила сопротивления (воздуха, воды и т.д.)

В этих случаях решение задачи упрощается.

### ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

Для решения многих задач динамики вместо непосредственного интегрирования дифференциальных уравнений движения оказывается более эффективным пользоваться так называемыми общими теоремами, которые являются следствием основного закона динамики.

### Количество движения точки

**Количеством движения** материальной точки  называется вектор, равный произведению массы точки  на ее скорость . 

Количество движения точки в физике часто называют **импульсом материальной точки**.

Проекции количества движения точки на прямоугольные декартовы оси координат равны:

, , 

Единицей измерения количества движения в СИ является – 

### Элементарный и полный импульс силы.

Действие силы  на материальную точку в течении времени  можно охарактеризовать **элементарным импульсом силы** .

**Полный импульс силы**  за время , или импульс силы , определяется по формуле . (Полный интеграл за время  от элементарного импульса).

В частном случае, если сила  постоянна и по величине , и по направлению (), .

Проекции импульса силы на прямоугольные декартовы оси координат равны:

  

Единицей измерения импульса в СИ является – 

### Теорема об изменении количества движения точки.

**Теорема.** Производная по времени от количества движения точки равна действующей на точку силе.

Запишем основной закон динамики в виде . Так как масса постоянна, то внесем ее под знак производной.

Тогда , (\*)

что и требовалось доказать.

В проекциях на координатные оси уравнение (\*) можно представить в виде:

  

**Теорема импульсов** (в дифференциальной форме)**.** Дифференциал от количества движения точки равен элементарному импульсу силы, действующей на точку.

Умножим левую и правую части уравнения (\*) на и получим

 (\*\*)

В проекциях на координатные оси получаем:

,

,

.

**Теорема импульсов** (в интегральной форме)**.** Изменение количества движения точки за какой-либо промежуток времени равно импульсу силы за этот же промежуток времени.

Интегрируя обе части уравнения (\*\*) по времени в пределах от нуля до  получаем:



В проекциях на координатные оси получаем:

,

,



### Момент количества движения точки.

В некоторых задачах в качестве динамической характеристики движущейся точки вместо самого количества движения рассматривают его момент относительно какого-либо центра или оси. Эти моменты определяются также как и моменты силы.

**Моментом количеством движения** материальной точки относительно некоторого центра О называется вектор, определяемый равенством 

Момент количества движения точки называют также **кинетическим моментом**.

**Момент количества движения** относительно какой-либо оси , проходящий через центр О, равен проекции вектора количества движения  на эту ось .

Если количество движения  задано своими проекциями  на оси координат и даны координаты  точки  в пространстве, то момент количества движения  относительно начала координат вычисляется следующим образом:

Проекции момента количества движения на оси координат равны:







Единицей измерения количества движения в СИ является – .

### Теорема об изменении момента количества движения точки.

**Теорема.** Производная по времени от момента количества движения точки, взятого относительно какого-нибудь центра, равна моменту действующей на точку силы относительно того же центра.



Доказательство: Продифференцируем момент количества движения по времени 

, , следовательно , (\*)

что и требовалось доказать.

**Теорема.** Производная по времени от момента количества движения точки, взятого относительно какой-либо оси, равна моменту действующей на точку силы относительно той же оси.

Для доказательства достаточно спроектировать векторное уравнение (\*) на эту ось. Для оси это будет выглядеть так: 

Следствия из теорем:

1. Если момент силы относительно точки равен нулю, то момент количества движения относительно этой точки величина постоянная.

,  

2. Если момент силы относительно оси равен нулю, то момент количества движения относительно этой оси величина постоянная.

,  

### Работа силы. Мощность.

Одна из основных характеристик силы, оценивающих действие силы на тело при некотором его перемещении.

**Элементарная работа силы** скалярная величина равная произведению элементарного перемещения на проекцию силы на это перемещение.

. ,



Единицей измерения работы в СИ является – 

При  при 

Частные случаи: 





Элементарное перемещение равно дифференциалу радиуса вектора точки приложения силы.

**Элементарная работа силы** равна скалярному произведению силы на элементарное перемещение или на дифференциал радиуса вектора точки приложения силы.



**Элементарная работа силы** равна скалярному произведению элементарного импульса силы на скорость точки.



Если сила  задана своими проекциями () на оси координат и элементарное перемещение задано своими проекциями () на оси координат, то элементарная работа силы равна:

 (аналитическое выражение элементарной работы).

Работа силы на любом конечном перемещении  равна взятому вдоль этого перемещения интегралу от элементарной работы.



**Мощностью силы** называется величина, определяющая работу, совершаемую силой в единицу времени. В общем случае мощность равна первой производной по времени от работы.

, 

**Мощность** равна скалярному произведению силы на скорость.

Единицей измерения мощности в СИ является – 

В технике за единицу силы принимается .

**Пример 1. Работа силы тяжести.**

 Пусть точка М, на которую действует сила тяжести Р, перемещается из положения  в положение . Выберем оси координат так, чтобы ось  была направлена вертикально вверх.

Тогда, , ,  и



Работа силы тяжести равна взятому со знаком плюс или минус произведению модуля силы на вертикальное перемещение точки ее приложения. Работа положительна, если начальная точка выше конечной, и отрицательна, если начальная точка ниже конечной.

**Пример 2. Работа силы упругости.**

 Рассмотрим материальную точку закрепленную на упругом элементе жесткости с, которая совершает колебания вдоль оси х. Сила упругости (или восстанавливающая сила) . Пусть точка М, на которую действует только сила упругости, перемещается из положения  в положение . (, ).



Работа силы упругости равна половине произведения жесткости упругого элемента на разность квадратов начального и конечного удлинения (или сжатия) упругого элемента.

Работа силы упругости равна площади фигуры (трапеции) расположенной под кривой . 

**Пример 3. Работа и мощность пары сил.**



Пусть пара сил приложена к вращающемуся вокруг неподвижной оси телу. Элементарная работа пары сил равна . Полная работа пары сил равна 

- угол поворота тела, - момент пары сил.

Мощность пары сил равна

 

### Кинетическая энергия точки

**Кинетической энергией материальной точки** (или ее живой силой) называют половину произведения массы точки на квадрат ее скорости.



### Теорема об изменении кинетической энергии точки.

**Теорема.** Дифференциал кинетической энергии точки равен элементарной работе силы, действующей на точку.



Доказательство: Основной закон динамики .

Умножим левую и правую части уравнения скалярно на  справа, получаем  .  - элементарная работа.

 - дифференциал от кинетической энергии.

, что и требовалось доказать.

**Теорема.** Производная по времени от кинетической энергии точки равна мощности, подводимой к этой точке.



**Теорема.** Изменение кинетической энергии точки на каком-либо перемещении равно работе силы, действующей на точку на этом же перемещении.



### Принцип Даламбера для материальной точки

Уравнение движения материальной точки относительно инерциальной системы отсчета под действием приложенных активных сил и сил реакции связей имеет вид:

,

 - равнодействующая активных сил,  - равнодействующая сил реакции связей.

**Силой инерции** материальной точки называют произведение массы точки на вектор ускорения, взятое с обратным знаком, т.е. .

Если использовать понятие силы инерции, то основной закон динамики принимает вид: 

**Принцип Даламбера**. При движении материальной точки активные силы и силы реакции связей вместе с силой инерции точки образуют равновесную систему сил.

Принцип Даламбера называют еще методом кинетостатики. Задачи динамики с помощью этого метода сводятся к задачам статики.

**Динамика несвободной материальной точки**

**Несвободной материальной точкой** называется точка, свобода движения которой ограничена.

Тела, ограничивающие свободу движения точки, называются **связями**.

Пусть связь представляет собой поверхность какого-либо тела, по которой движется точка. Тогда координаты точки должны удовлетворять уравнению этой поверхности, которое называется уравнением связи.



Если точка вынуждена двигаться по некоторой линии, то уравнениями связи являются уравнения этой лини.

, 

Таким образом, движение несвободной материальной точки зависит не только от приложенных к ней активных сил и начальных условий, но так же от имеющихся связей. При этом значения начальных параметров должны удовлетворять уравнениям связей.

Связи бывают двухсторонние или удерживающие и односторонние или неудерживающие.

**Связь называется двухсторонней** если, накладываемые ею на координаты точки ограничения выражаются в форме равенств, определяющих кривые или поверхности в пространстве на которых должна находится точка.

**Пример** Материальная точка подвешена на стержне длины .

Уравнение связи имеет вид:



**Связь называется односторонней** если, накладываемые ею на координаты точки ограничения выражаются в форме неравенств. Односторонняя связь препятствует перемещению точки лишь в одном направлении и допускает ее перемещение в других направлениях.

**Пример** Материальная точка подвешена на нити длины .

Уравнение связи имеет вид:



**Принцип освобождаемости от связей**

Связь можно отбросить, заменив действие связи силой реакции связи.

**.**

В проекциях на оси декартовой системы координат это будет выглядеть так:

**,**

**,**

**.**

**Относительное движение материальной точки**

Во многих задачах динамики движение материальной точки рассматривается относительно системы отсчета, движущейся относительно инерциальной системы отсчета.

Получим дифференциальные уравнения движения материальной точки относительно подвижной системы отсчета.

 - инерциальная система отсчета.

 - подвижная система отсчета.

**,**

где  - сумма активных сил,  - сумма сил реакции связи.

Согласно теореме Кориолиса ****

Перепишем дифференциальное уравнение следующим образом



Введем обозначения

 - переносная сила инерции,

 - кориолисова сила инерции.

С учетом этих обозначений мы получаем **динамическую теорему Кориолиса** (уравнения относительного движения).

Материальная точка движется относительно неинерциальной системы отсчета так же как и относительно инерциальной, только к приложенным активным силам и силам реакции связей следует добавить кориолисову и переносную силу инерции.

****

Силы  и  являются поправками на неинерционность системы.

В проекциях на подвижные оси

****

****

****

**Частные случаи относительного движения**

1. Относительное движение по инерции

Если материальная точка движется относительно подвижной системы отсчета прямолинейно и равномерно, то такое движение **называется относительным движением по инерции.**

, , следовательно

****

2. Относительное равновесие

При покое материальной точки относительно подвижной системы отсчета ее относительные скорость и ускорение равны нулю, т.е.

 и , следовательно ускорение Кориолиса тоже равно нулю 

Условие относительного равновесия имеет вид:

****

3. Инерциальные системы отсчета

Переносное ускорение в общем случае вычисляется по формуле

**,**

где  - ускорение точки, принятой за полюс (начало координат); ** -** угловая скорость вращения подвижной системы координат вокруг выбранного полюса; ** -** угловое ускорение этого вращения (**)**; **** - радиус-вектор движения точки относительно полюса.

Если подвижная система отсчета движется поступательно, прямолинейно и равномерно, то

**, **

и уравнения относительного движения имеют вид:

**.**

Подвижная система отсчета тоже инерциальна.