# **Лекция 7**

Краткое содержание: Сложное движение точки. Абсолютное, относительное и переносное движение точки. Сложение скоростей. Сложение ускорений при поступательном движении твердого тела. Ускорение Кориолиса. Правило Жуковского.

**Сложное движение точки в общем случае**

**Основные понятия**

Во многих задачах движение точки приходится рассматривать относительно двух (и более) систем отсчета, движущихся друг относительно друга.

В простейшем случае сложное движение точки состоит из **относительного** и **переносного** движений. Определим эти движения.

Рассмотрим две системы отсчета движущиеся друг относительно друга. Одну систему отсчета ***O***1***x***1***y***1***z***1 примем за основную и неподвижную. Вторая система отсчета ***Oxyz*** будет двигаться относительно первой.

Движение точки относительно подвижной системы отсчета ***Oxyz*** называется **относительным.** Характеристики этого движения, такие как, траектория, скорость и ускорение, называются **относительными.** Их обозначают индексом *r*.

Движение точки относительно основной неподвижной системы отсчета ***O***1***x***1***y***1***z***1называется **абсолютным** (или сложным). Траектория, скорость и ускорение этого движения называются **абсолютными.** Их обозначают без индекса.

**Переносным** движением точки называется движение, которое она совершает вместе с подвижной системой отсчета, как точка, жестко скрепленная с этой системой в рассматриваемый момент времени. Вследствие относительного движения движущаяся точка в различные моменты времени совпадает с различными точками тела S, с которым скреплена подвижная система отсчета. **Переносной** скоростью и **переносным** ускорением являются скорость и ускорение той точки тела S, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка. **Переносные** скорость и ускорение обозначают индексом  *e*.

Если траектории всех точек тела S, скрепленного с подвижной системой отсчета, изобразить на рисунке, то получим семейство линий – семейство траекторий переносного движения точки М. Вследствие относительного движения точки М в каждый момент времени она находится на одной из траекторий переносного движения.

Одно и то же абсолютное движение, выбирая различные подвижные системы отсчета, можно считать состоящим из разных переносных и соответственно относительных движений.

**Пример.**

Имеется круглый диск, который вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси перпендикулярной плоскости диска. На диске имеется канавка, направленная вдоль радиуса диска. Вдоль канавки перемещается материальная точка. Материальная точка совершает сложное движение. Движение точки относительно неподвижной системы отсчета является абсолютным. Подвижную систему отсчета жестко свяжем с вращающимся диском, одну из осей (например, x) направим вдоль канавки. Движение точки вдоль оси x будет относительным, движение точки вместе с подвижной системой отсчета (вместе с диском) будет переносным движением.

**Абсолютная и относительная производные**

При рассмотрении сложного движения точки необходимо рассматривать изменение векторных величин с течением времени по отношению к системам отсчета, движущимся друг относительно друга.

Рассмотрим произвольный вектор  в двух системах отсчета: подвижной и неподвижной. В подвижной системе отсчета только проекции вектора  являются функциями времени, в неподвижной системе отсчета кроме проекций, функциями времени являются и единичные вектора  (они изменяют свое направление в пространстве).

 (1)

Введем обозначения  - абсолютная производная – производная в неподвижной системе отсчета; - относительная производная – производная в подвижной системе отсчета.

Установим зависимость между абсолютной и относительной производными. Вычислим абсолютную производную по времени от вектора  используя формулу (1). Получим

 (2)

Первые три слагаемых учитывают изменение вектора  при неизменных  и поэтому составляют относительную производную, т.е.

. (3)

Производные по времени от единичных векторов определим по формулам Пуассона 

Вектор  - это угловая скорость вращательной части движения вокруг точки О подвижной системы отсчета относительно неподвижной.

После подстановки получаем

. (4)

Получена формула зависимости производных вектора  в двух системах отсчета движущихся друг относительно друга (формула Бура).

**Сложение скоростей**

Пусть система отсчета ***O***1***x***1***y***1***z***1 - неподвижная, а система отсчета ***Oxyz -*** подвижная. Движение точки относительно основной неподвижной системы отсчета ***O***1***x***1***y***1***z***1 называется **абсолютным.** Движение точки относительно подвижной системы отсчета ***Oxyz*** называется **относительным.** **Переносным** движением точки называется движение, которое она совершает вместе с подвижной системой отсчета, как точка, жестко скрепленная с этой системой в рассматриваемый момент времени. Относительные скорость и ускорение обозначают  и , переносные -  и , а абсолютные -  и .

Движение подвижной системы отсчета относительно неподвижной можно охарактеризовать скоростью ее поступательного движения , например вместе с точкой ***О***, и вектором угловой скорости  ее вращения вокруг ***О***.

**Теорема***. Скорость абсолютного движения точки равна векторной сумме переносной и относительной скоростей* *******.*

Доказательство. Рассмотрим движение точки . Положение точки относительно неподвижной системы отсчета определяется вектором , а относительно подвижной вектором . Положение точки  относительно неподвижной системы отсчета определяется вектором . Для любого момента времени выполняется тождество .

Продифференцируем его по времени (вычислим производные в неподвижной системе отсчета) и получим

 (5)

По определению,  - абсолютная скорость точки ,  - абсолютная скорость точки . Для вычисления  применим формулу Бура. Имеем ****. Относительная производная **** - является относительной скоростью точки  по отношению к неподвижной системе отсчета, а  - угловая скорость вращения подвижной системы отсчета.

Таким образом из (5) получаем **** (6)

Скорость **** является скоростью точки свободного твердого тела, скрепленного с подвижной системой координат, с которой в данный момент совпадает точка  в движении тела относительно неподвижной системы отсчета. Это есть переносная скорость точки .

Окончательно получаем

****, (7)

что и требовалось доказать.

Пример. Определим скорость абсолютного движения точки М, если известны скорости абсолютного и переносного движений этой точки.

За малый промежуток времени **** вдоль траектории **** точка М совершит относительное перемещение, определяемое вектором ****. Сама кривая ****, двигаясь вместе с подвижными осями, перейдет за тот же промежуток времени в новое положение **** Одновременно та точка **** кривой ****, с которой совпадала точка М, совершит переносное перемещение ****. В результате точка **** совершит перемещение ****.

****

Деля обе части равенства на **** и переходя к пределу, получим

****

**Сложение ускорений в общем случае переносного движения**

**Теорема** (кинематическая теорема Кориолиса) : *Абсолютное ускорение точки является векторной суммой трех ускорений - переносного, относительного и Кориолиса.*

******

Доказательство. Абсолютное ускорение точки  определим вычислением полной производной по времени от абсолютной скорости.

****

Для производных от векторов  и  применим формулу Бура. Получим

**** ****

Учитывая, что ****, ****, ****, ****,

получим для абсолютного ускорения **** (8)

В этой формуле первые три слагаемых являются переносным ускорением для точки  ****. Последнее слагаемое называется **ускорением Кориолиса** (иногда его называют добавочным или поворотным ускорением) и обозначается ****.

В итоге формула (8) принимает вид : ****, что и требовалось доказать.

**Ускорение Кориолиса**

**Теорема** (Правило Жуковского). Модуль ускорения Кориолиса равен удвоенному произведению угловой скорости переносного вращения на модуль проекции относительной скорости на плоскость, перпендикулярную оси переносного вращения; чтобы получить направление ускорения Кориолиса, необходимо вектор проекции относительной скорости повернуть на **** вокруг оси, параллельной оси переносного вращения в направлении этого вращения.

**Сложение ускорений при поступательном переносном движении.**

Определим ускорение абсолютного движения точки в частном случае поступательного переносного движения.

Справедлива теорема ****. Если подвижная система отсчета **** движется поступательно относительно неподвижной ****, то все точки тела, скрепленного с этой системой, имеют одинаковые скорости и ускорения, равные скорости и ускорению начала координат подвижной системы О. Следовательно, для скорости и ускорения переносного движения имеем

****, ****

Выразим относительную скорость в декартовых координатах

****

Подставляя в теорему о сложении скоростей значения переносной и относительной скоростей получаем ****

По определению ****

****, ****, ****.

Следовательно, ****

Абсолютное ускорение точки при поступательном переносном движении равно векторной сумме ускорений переносного и относительного движений.

****