# **Лекция 6**

Краткое содержание: Задачи кинематики твердого тела. Виды движения твердого тела. Число степеней свободы твердого тела. Поступательное движение твердого тела. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Угловая скорость и угловое ускорение твердого тела. Скорости и ускорения точек тела при вращении. Векторные формулы для скоростей и ускорений точек тела. Сложное движение точки. Абсолютное, относительное и переносное движение точки. Сложение скоростей. Сложение ускорений при поступательном движении твердого тела.

## **КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА**

**Абсолютно твердым телом** называется материальное тело, геометрическая форма которого и размеры не изменяются ни при каких механических воздействиях со стороны других тел, а расстояние между любыми двумя его точками остается постоянным.

Кинематика твердого тела, также как и динамика твердого тела, является одним из наиболее трудных разделов курса теоретической механики.

Задачи кинематики твердого тела распадаются на две части:

1. задание движения и определение кинематических характеристик движения тела в целом;
2. определение кинематических характеристик (траектория, скорость и ускорение) движения отдельных точек тела.

Существует пять видов движения твердого тела:

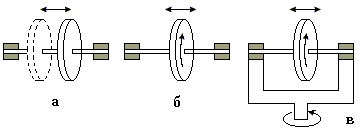
1. поступательное движение;
2. вращение вокруг неподвижной оси;
3. плоское движение;
4. вращение вокруг неподвижной точки;
5. свободное движение.

Первые два называются простейшими движениями твердого тела:

### Степени свободы твердого тела

Числом степеней свободы твердого тела называется число независимых параметров, которые однозначно определяют положение тела в пространстве относительно рассматриваемой системы отсчета.

Движение твердого тела во многом зависит от числа его степеней свободы.



Рассмотрим пример. Если диск, не вращаясь, может скользить вдоль неподвижной в данной системе отсчета оси (рис. а), то в данной системе отсчета он, очевидно, обладает только одной степенью свободы - положение диска однозначно определяется, скажем, координатой x его центра, отсчитываемой вдоль оси. Но если диск, кроме того, может еще и вращаться (рис. б), то он приобретает еще одну [степень свободы](/db/search.html?not_mid=1177773&words=%F1%F2%E5%EF%E5%ED%FC%20%F1%E2%EE%E1%EE%E4%FB) - к координате x добавляется угол поворота  диска вокруг оси. Если ось с диском зажата в рамке, которая может поворачиваться вокруг вертикальной оси (рис. в), то число степеней свободы становится равным трем – к x и  добавляется угол поворота рамки .

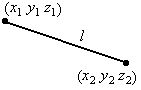
Свободная материальная точка в пространстве имеет три степени свободы: например декартовы координаты ***x, y*** и ***z***. Координаты точки могут определяться также в цилиндрической (***r, , z***) и сферической (***r, , ***) системах отсчета, но число параметров, однозначно определяющих положение точки в пространстве всегда три.

Материальная точка на плоскости имеет две степени свободы. Если в плоскости выбрать систему координат ***xОy,*** то координаты ***x*** и ***y*** определяют положение точки на плоскости, акоордината  ***z*** тождественно равна нулю.

Свободная материальная точка на поверхности любого вида имеет две степени свободы. Например: положение точки на поверхности Земли определяется двумя параметрами: широтой и долготой.

Материальная точка на кривой любого вида имеет одну степень свободы. Параметром, определяющим положение точки на кривой, может быть, например, расстояние вдоль кривой от начала отсчета.

Рассмотрим две материальные точки в пространстве, соединенные жестким стержнем длины ***l.*** Положение каждой точки определяется тремя параметрами, но на них наложена связь.



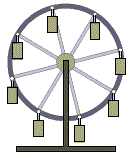
Уравнение  является уравнением связи. Из этого уравнения любая одна координата может быть выражена через остальные пять координат (пять независимых параметров). Поэтому эти две точки имеют () пять степеней свободы.

Рассмотрим три материальные точки в пространстве, не лежащие на одной прямой, соединенные тремя жесткими стержнями. Число степеней свободы этих точек равно () шести.

Свободное твёрдое тело в общем случае имеет 6 степеней свободы. Действительно, положение тела в пространстве относительно какой-либо системы отсчета, определяется заданием трех его точек, не лежащие на одной прямой, и расстояния между точками в твердом теле остаются неизменными при любых его движениях. Согласно выше сказанному, число степеней свободы должно быть равно шести.

**Поступательное движение твердого тела.**

**Поступательным движением** твёрдого тела называется такое его движение, при котором любая прямая, жёстко скреплённая с телом, остаётся параллельной своему первоначальному положению в каждый момент времени.



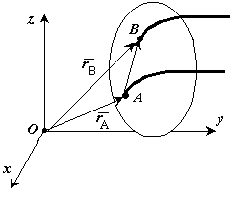
Поступательно движутся педали велосипеда относительно его рамы во время движения, поршни в цилиндрах двигателя внутреннего сгорания относительно цилиндров, кабины колеса обозрения в парках относительно Земли.

Траектории точек у поступательно движущегося твердого тела могут быть не только прямыми, но и кривыми, в том числе окружностями.

**Теорема.** *При поступательном движении твёрдого тела траектории, скорости и ускорения всех точек твердого тела одинаковы.*

Если выбрать две точки твердого тела А и В, то радиус-векторы этих точек связаны соотношением . Траектория точки А это кривая, которая задается функцией , а траектория точки В это кривая, которая задается функцией . Траектория точки В получается переносом траектории точки А в пространстве вдоль вектора , который не меняет своей величины и направления во времени. Следовательно, траектории всех точек твердого тела одинаковы.

Продифференцируем по времени выражение .



Получаем , так как . Продифференцируем по времени скорости и получим выражение .

Следовательно, скорости и ускорения всех точек твердого тела одинаковы. Что и требовалось доказать.

Поступательное движение твёрдого тела полностью характеризуется движением одной любой его точки.

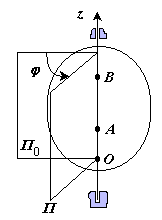
Твёрдое тело при поступательном движении имеет три степени свободы.

Для задания движения твердого тела в декартовой системе координат достаточно знать координаты  любой его точки.

Функции  называются **уравнениями поступательного движения твердого тела**.

**Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси**

Вращением твёрдого тела вокруг неподвижной оси называется такое его движение, при котором две точки тела остаются неподвижными в течение всего времени движения. При этом также остаются неподвижными все точки тела, расположенные на прямой, проходящей через его неподвижные точки. Эта прямая называется **осью вращения тела**.



Пусть точки A и B неподвижны. Вдоль оси вращения направим ось . Через ось вращения проведём неподвижную плоскость  и подвижную , скреплённую с вращающимся телом.

Положение плоскости  и самого тела определяется двугранным углом между плоскостями  и . Обозначим его . Угол  называется **углом поворота тела**.

Положение тела относительно выбранной системы отсчета однозначно определяется в любой момент времени, если задано уравнение , где  - любая дважды дифференцируемая функция времени. Это уравнение называется **уравнением вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси**.

У тела, совершающего вращение вокруг неподвижной оси, одна степень свободы, так как его положение определяется заданием только одного параметра – угла .

Угол  считается положительным, если он откладывается против часовой стрелки, и отрицательным – в противоположном направлении. Траектории точек тела при его вращении вокруг неподвижной оси являются окружностями, расположенными в плоскостях перпендикулярных оси вращения.

Для характеристики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси введём понятия угловой скорости и углового ускорения.

**Алгебраической угловой скоростью** тела в какой-либо момент времени называется первая производная по времени от угла поворота в этот момент, то есть .

Угловая скорость является положительной величиной при вращении тела против часовой стрелки, так как угол поворота возрастает с течением времени, и отрицательной – при вращении тела по часовой стрелке, потому что угол поворота при этом убывает.

Размерность угловой скорости по определению: 

В технике угловая скорость – это частота вращения, выраженная в оборотах в минуту. За одну минуту тело повернётся на угол , где n - число оборотов в минуту. Разделив этот угол на число секунд в минуте, получим



**Алгебраическим угловым ускорением тела** называется первая производная по времени от угловой скорости, то есть вторая производная от угла поворота т.е. 

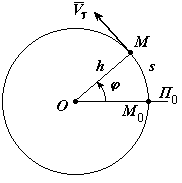
Размерность углового ускорения по определению: 

Введем понятия векторов угловой скорости и углового ускорения тела.

 и , где  - единичный вектор оси вращения. Векторы  и  можно изображать в любых точках оси вращения, они являются скользящими векторами.

**Скорости и ускорения точек тела при вращении.**

Перейдем к изучению движения отдельных точек твердого тела. Известно уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси ****.



Рассмотрим какою-нибудь точку *М* твердого тела, находящуюся на расстоянии *h* от оси вращения. При вращении твердого тела точка *М* будет описывать окружность радиуса *h,* плоскость которой перпендикулярна оси вращения, а центр О лежит на самой оси. Если за время происходит элементарный поворот тела на угол , то точка *М* при этом совершает вдоль своей траектории элементарное перемещение ****.

Тогда алгебраическая скорость будет равна **** или ****.

Скорость точки равна ****. Скорость **** в отличие от угловой скорости тела называют иногда еще **линейной** или **окружной скоростью**.

Модуль скорости равен ****.

Величины скоростей точек тела, при его вращении вокруг неподвижной оси, пропорциональны кратчайшим расстояниям от этих точек до оси. Коэффициентом пропорциональности является угловая скорость ****. Скорости точек направлены по касательным к траекториям и, следовательно, перпендикулярны радиусам вращения.

Ускорение точки раскладываем на касательную и нормальную составляющие, т.е.

****.

Касательное и нормальное ускорения вычисляются по формулам

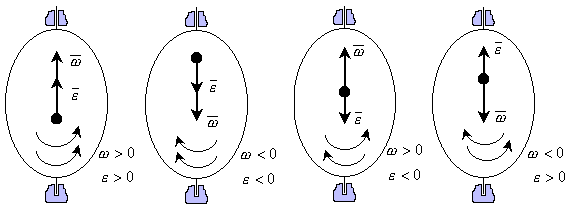
****, ****.

Таким образом ****, **** и модуль ускорения вычисляется по формуле ****.

Касательные, нормальные и полные ускорения точек тела, при его вращении вокруг неподвижной оси, как и скорости, так же пропорциональны кратчайшим расстояниям от этих точек до оси. Нормальное ускорение направлено по радиусу окружности к оси вращения. Направление касательного ускорения зависит от знака углового ускорения.

Если  при , то алгебраическая угловая скорость возрастает с течением времени и, следовательно, тело вращается ускоренно в рассматриваемый момент времени в положительную сторону. Направление векторов  и  совпадают, оба они направлены в положительную сторону оси вращения .

При  и  тело вращается ускоренно в отрицательную сторону. Направление векторов  и  совпадают, оба они направлены в отрицательную сторону оси вращения .



Если  при , то имеем замедленное вращение в положительную сторону. Векторы  и  направлены в противоположные стороны.

Если  при , то имеем замедленное вращение в отрицательную сторону. Векторы  и  направлены в противоположные стороны.

Угловую скорость и угловое ускорение на рисунках изображают дуговыми стрелками вокруг оси вращения (если нельзя изобразить вектора). Дуговая стрелка для угловой скорости указывает направление вращения тела, а дуговая стрелка для углового ускорения – направление, в котором увеличивается алгебраическая угловая скорость. Для ускоренного вращения дуговые стрелки для угловой скорости и углового ускорения имеют одинаковые направления, для замедленного их направления противоположны.

**Частные случаи вращения твердого тела**

##### ***Равномерное вращение***

Вращение называется равномерным, если его угловая скорость постоянна, т.е. .

Так как , то . Начальные условия: , то после интегрирования получим

 или 



##### ***Равнопеременное вращение***

Вращение называется равноускоренным, если его угловое ускорение постоянно и больше нуля, т.е. .

Вращение называется равнозамедленным, если его угловое ускорение постоянно и меньше нуля, т.е. .

Так как , то . Начальные условия: , то после интегрирования получим

 или 



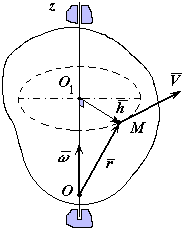
далее ,  и после интегрирования,



или 

**Векторные скорости и ускорения точек тела**

Скорость точки по модулю и направлению можно представить векторным произведением



****,

где **** - радиус-вектор точки М, проведенный из произвольной точки оси вращения ****.

Это выражение называется **векторной формулой Эйлера.**

Доказательство. Вектор **** перпендикулярен плоскости, в которой расположены векторы **** и ****, следовательно, по направлению он совпадает со скоростью ****. Модуль векторного произведения **** Таким образом, векторное произведение **** по модулю и направлению определяет скорость точки.

Определим ускорение точки продифференцировав формулу Эйлера.

****, или

****

Первое слагаемое является касательным ускорением, а второе – нормальным.

**** ****.

Сопоставление двух формул для скорости точки (**** и ****) дает формулу для вычисления производной по времени от вектора ****:

****.

В этой формуле вектор **** имеет постоянный модуль, так как соединяет все время две точки твердого тела.

Алгебраическая угловая скорость это проекция вектора угловой скорости на ось вращения. Алгебраическое угловое ускорение это проекция вектора углового ускорения скорости на ось вращения.